

Récepteurs source-canal conjoint utilisant des codes LDPC

Charly Poulliat ¹ Catherine Lamy-Bergot ² David Declercq ¹ Inbar Fijalkow ¹

(¹) ETIS UMR8051, ENSEA/UCP/CNRS

6, Avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, FRANCE

tél.: +33 1 30 73 66 10 - fax : +33 1 30 73 66 27

Emails : {charly.poulliat, david.declercq, inbar.fijalkow}@ensea.fr

(²) THALES Land & Joint Systems, EDS/SPM WaveForm Design Group

160 boulevard de Valmy, B.P. 82,F-92704 Colombes Cedex, FRANCE

tél.: +33 1 46 13 27 90 - fax : +33 1 46 13 25 55

Email : catherine.lamy@fr.thalesgroup.com

Ce travail a été mené en collaboration entre ETIS et THALES grâce à un soutien de la Communauté Européenne via le Réseau d'excellence NoE NEWCOM.

Abstract

Grâce à une analyse asymptotique, l'optimisation d'un récepteur utilisant un décodage source-canal conjoint (DSCC) impliquant un code LDPC est considérée pour les systèmes itératifs suivant : (a) récepteur source-canal conjoint optimisé, (b) récepteurs compatibles avec des applications non conjointes, (c) le récepteur tandem optimal supposant une compression de source parfaite, (d) le récepteur tandem classique. Des résultats d'optimisation et de simulation sont proposés pour différents rendements et longueurs de mots de code.

I. INTRODUCTION

Les récepteurs source-canal conjoints itératifs sont des récepteurs de type "turbo" où les itérations ne sont plus concentrées dans le décodeur de canal mais se font entre un décodeur de source et un décodeur de canal à entrées et sorties souples. Le but est alors d'exploiter au mieux la redondance résiduelle et la structure de la source afin d'améliorer les performances en réception. On trouve ainsi, par exemple, un codeur source concaténé avec un code convolutif dans [2] et un système doublement itératif mettant en jeu des turbo-codes comme codeur de canal dans [8]. Dans [11], un code LDPC (Low Density Parity Check) est utilisé comme code correcteur, ce choix étant motivé par la facilité d'optimisation de la structure du code LDPC, ce qui a permis d'obtenir un récepteur asymptotiquement optimisé pour une source et un code source associés donnés. Ainsi les auteurs proposent-ils une méthode d'analyse et d'optimisation pour obtenir la structure du récepteur, optimisée sous approximation gaussienne. Cependant, les codes obtenus par cette méthode, si ils permettent d'atteindre de bonnes performances pour le système conjoint, n'offrent pas nécessairement des performances satisfaisantes lorsqu'ils ne sont plus considérés conjointement. Il est pourtant intéressant en pratique d'avoir des systèmes qui offrent de bonnes performances à la fois dans un cadre source-canal conjoint et dans un cadre tandem. La question est alors de savoir quels peuvent être ces récepteurs et si ils offrent un bon compromis de performances sur les deux types d'applications ? Il est donc proposé ici de considérer cette optimisation du récepteur source-canal conjoint pour les systèmes itératifs suivant : (a) récepteur source-canal conjoint optimisé, (b) récepteurs compatibles avec des applications non conjointes, (c) le récepteur tandem "optimal" supposant une compression de source parfaite, (d) le récepteur tandem classique.

L'article est organisé comme suit : le paragraphe II présente le système itératif et les hypothèses considérées. L'analyse asymptotique de convergence du récepteur conjoint est alors brièvement décrite au paragraphe III. L'optimisation du récepteur conjoint dans les différents cas d'application précités est ensuite discutée au paragraphe IV. Enfin, des résultats d'optimisation et de simulations sont fournis au paragraphe V et les conclusions et perspectives sont données au paragraphe VI.

II. DESCRIPTION DU RÉCEPTEUR ET HYPOTHÈSES

Dans la suite de l'article, le canal de propagation considéré est le canal sans mémoire à Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) et la modulation considérée est de type MDP-2 (modulation de phase à 2 états). Pour des raisons pratiques d'implantation, nous supposons le code LDPC systématique. Une itération globale de décodage est composée d'une itération de décodeur LDPC suivie d'une itération du décodeur source. Comme dans de nombreux

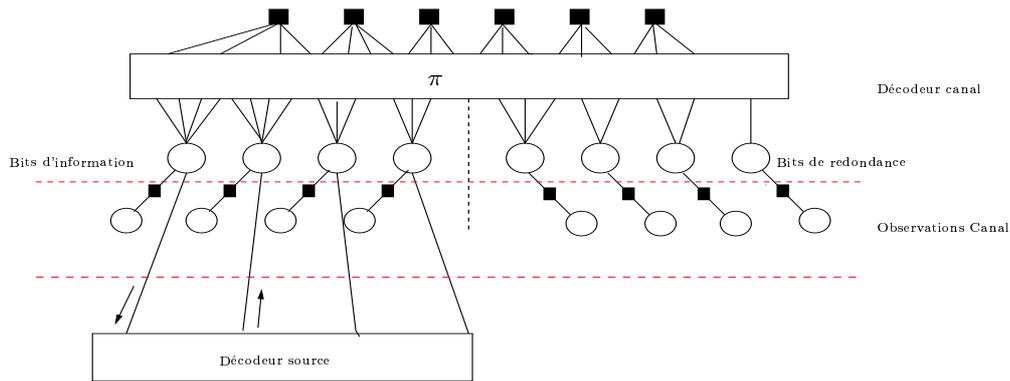


Fig. 1. Représentation graphique du récepteur conjoint.

travaux, nous supposons ici la synchronisation des données effective au niveau paquet (mot de code). Le graphe factoriel correspondant au système proposé est représenté en figure 1.

L'algorithme de propagation de croyances (BP) est utilisé pour le décodage itératif du code LDPC et un Maximum A Posteriori (MAP) pour le décodeur de source. Pour les besoins de l'optimisation nous considérons une approche asymptotique, supposant des mots de code de taille infinie et un nombre infini d'itérations. Ceci permet alors de considérer tous les messages transitant dans le graphe comme étant indépendants. Cependant, des résultats de simulations seront fournis dans le cas de mots de code de tailles longues et moyennes.

Une des originalités de notre système est, contrairement aux approches classiques, de ne pas considérer d'entrelaceur entre le décodeur LDPC et le décodeur de source souple, et ceci pour deux raisons principales. Premièrement, la présence de l'entrelaceur est généralement requise du fait de la corrélation engendrée par le décodeur MAP sur le treillis du code canal (pour des approches turbo classique) et du code de type Huffman. Dans le cas d'un couplage de code de type Huffman avec un code LDPC, l'entrelaceur interne du LDPC permet à lui seul de garantir l'indépendance des messages transitant dans le graphe. La deuxième raison est une raison fonctionnelle liée à l'optimisation : celle-ci repose en effet sur l'hypothèse que le décodeur source a connaissance du type de degré auquel il est connecté. Cette hypothèse permet alors de considérer la réponse du décodeur source comme stationnaire pour des noeuds consécutifs de même degré de connexion. C'est une hypothèse qui nous permet d'écrire de manière semi-analytique l'évolution de l'information mutuelle dans tout le graphe sous approximation gaussienne des messages transitant dans le graphe. Notons que, du fait du caractère systématique du code, nous aurons à différencier bits d'information et de redondance, ce qui supposera une paramétrisation spécifique des codes LDPC pour le décodage source canal-conjoint.

III. ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE CONVERGENCE

Pour mener une analyse asymptotique de convergence, c'est à dire établir les conditions de convergence à taille de mot de code infinie, il faut pouvoir suivre l'évolution au cours des itérations des paramètres caractérisant l'évolution des quantités d'information transitant dans le graphe du récepteur turbo. Dans le cas de récepteurs utilisant des

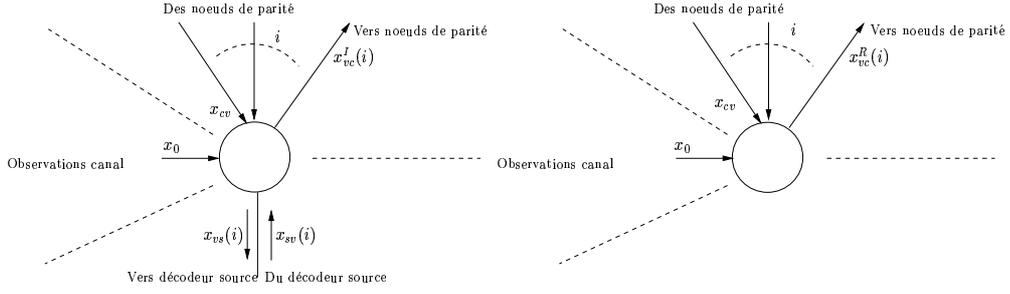


Fig. 2. Messages transitant dans les différents noeuds de données. A gauche sont représentés les messages transitant par les noeuds associés aux bits d'information, et à droite ceux transitant par les noeuds associés aux bits de redondance

codes LDPC, il est possible [4][5] de relier ces paramètres d'évolution à la structure même du code à faible densité, qui est définie ici spécifiquement dans le cadre de l'application au décodage source-canal conjoint en introduisant la distinction entre noeuds de données d'information et noeuds de données de redondance. On obtient alors une formule analytique d'évolution de l'information mutuelle sous approximation gaussienne dépendant de la fonction EXIT chart du codeur source, de la variance du bruit sur le canal et de la structure du codeur LDPC, de laquelle on peut dériver la condition de stabilité assurant la convergence du système.

A. Paramétrisation

Le paramètre monodimensionnel considéré pour l'analyse asymptotique est l'information mutuelle associée à chaque message rapport logarithmique de vraisemblance (Log-Likelihood ratio, LLR) transitant dans le graphe associé au récepteur [3] [4][5]. Le décodeur source ne fournissant une information extrinsèque que sur les bits d'information, on distinguera, parmi les noeuds de données du codes LDPC, les noeuds de données associés aux bits d'information et ceux associés aux bits de redondance. A l'itération de décodage ℓ , on note $x_{cv}^{(\ell)}$, $x_{vc}^{I(\ell)}(i)$, $x_{vc}^{R(\ell)}(i)$, $x_{vs}^{(\ell)}(i)$ et $x_{sv}^{(\ell)}(i)$ respectivement l'information mutuelle en sortie des noeuds de parité, l'information mutuelle associée aux messages entre les noeuds de données associés aux bits d'information (I) de degré i et les noeuds de parité, l'information mutuelle associée aux messages entre les noeuds de données associés aux bits de redondance (R) de degré i et les noeuds de parité, l'information mutuelle associée aux messages entre les noeuds de données de degré i et le décodeur source et enfin l'information mutuelle en sortie de décodeur source. On définit $x_{vc}^{(\ell)}$ comme l'information mutuelle à l'entrée des noeuds de parité (après l'entrelaceur π). On a donc un mélange de $x_{vc}^{I(\ell)}(i)$ et $x_{vc}^{R(\ell)}(i)$. En figure 2 sont représentées les différentes quantités d'information mises en jeu au niveau des noeuds de données.

Dans le cadre d'une approximation gaussienne [4], la relation entre l'information mutuelle et la moyenne des messages LLR associés est donnée par la fonction $J(\cdot)$ [3] :

$$J(m) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi m}} \int_{\mathbf{R}} \log_2(1 + e^{-v}) \exp\left(\frac{-(v-m)^2}{4m}\right) dv.$$

Pour le code LDPC, $\underline{\rho} = [\rho_2, \dots, \rho_{t_{r_{\max}}}]^\top$, $\underline{\lambda}^I = [\lambda_2^I, \dots, \lambda_{t_{c_{\max}}}^I]^\top$ et $\underline{\lambda}^R = [\lambda_2^R, \dots, \lambda_{t_{c_{\max}}}^R]^\top$ représentent re-

spectivement la proportion de branches du graphe connectées avec des noeuds de parité de degré de connexion $\{j, j = 2, \dots, t_{r_{max}}\}$, la proportion de branches du graphe connectées avec des noeuds de données d'information de degré de connexion $\{i, i = 2, \dots, t_{c_{max}}\}$ et la proportion de branches du graphe connectées avec des noeuds de données de redondance de degré de connexion $\{r, r = 2, \dots, t_{c_{max}}\}$. $t_{r_{max}}$ (resp. $t_{c_{max}}$) est le degré de connexion maximum pour un noeud de parité (resp. pour un noeud de données). On définit également les vecteurs associés $\underline{\lambda} = [\underline{\lambda}^I, \underline{\lambda}^R]^\top$, $\underline{1/t_c} = [1/2, \dots, 1/t_{c_{max}}]^\top$ et $\underline{1/t_r} = [1/2, \dots, 1/t_{r_{max}}]^\top$. Dans la suite, les quantités $\{\tilde{\lambda}_i^I, i = 2 \dots t_{c_{max}}\}$ et $\{\tilde{\lambda}_r^R, r = 2 \dots t_{c_{max}}\}$ désigneront respectivement les proportions de noeuds de données associés à des bits d'information et les proportions de noeuds de données associés à des bits de redondance. La relation de passage entre les quantités λ_i^I (resp. λ_r^R) et $\tilde{\lambda}_i^I$ (resp. $\tilde{\lambda}_r^R$) est donnée par

$$\tilde{\lambda}_i^I = \frac{\lambda_i^I/i}{\sum_i \lambda_i^I/i + \sum_r \lambda_r^R/r}$$

$$\lambda_i^I = \frac{i\tilde{\lambda}_i^I}{\sum_i i\tilde{\lambda}_i^I + \sum_r r\tilde{\lambda}_r^R}$$

Le canal de propagation étant le canal BABG, la moyenne des messages LLR associés aux observations du canal est donnée par $\mu_0 = J^{-1}(x_0) = 2/\sigma^2$ avec σ^2 la variance du bruit du canal.

B. Evolution de l'information mutuelle

Dans le cadre d'une approximation gaussienne de la densité des messages pour le décodeur LDPC et le décodeur source, les équations décrivant l'évolution de l'information mutuelle au sein du récepteur conjoint sont les suivantes [10][11]:

- Mise à jour des messages pour les noeuds de données :

$$x_{vc}^{I(\ell)}(i) = J(\mu_0 + (i-1)J^{-1}(x_{cv}^{(\ell-1)}) + J^{-1}(x_{sv}^{(\ell-1)}(i)))$$

$$x_{vc}^{R(\ell)}(r) = J(\mu_0 + (r-1)J^{-1}(x_{cv}^{(\ell-1)}))$$

$$x_{vc}^{(\ell)} = \sum_{i=2}^{t_{c_{max}}} \lambda_i^I x_{vc}^{I(\ell)}(i) + \sum_{r=2}^{t_{c_{max}}} \lambda_r^R x_{vc}^{R(\ell)}(r) \quad (1)$$

- Mise à jour des messages pour les noeuds de parité:

$$x_{cv}^{(\ell)} = 1 - \sum_{j=2}^{t_{r_{max}}} \rho_j J((j-1)J^{-1}(1 - x_{vc}^{(\ell)})) \quad (2)$$

- Mise à jour des messages du décodeur LDPC vers le décodeur source :

$$x_{vs}^{(\ell)}(i) = J(\mu_0 + iJ^{-1}(x_{cv}^{(\ell)})), \forall i = 2, \dots, t_{c_{max}} \quad (3)$$

- Mise à jour des messages en sortie de décodeur source :

$$x_{sv}^{(\ell)}(i) = T(x_{vs}^{(\ell)}(i)), \forall i = 2, \dots, t_{c_{max}} \quad (4)$$

où $T(\cdot)$ est la fonction EXIT chart associée au décodeur source, généralement obtenue par méthode de Monte Carlo comme dans [6] en utilisant une approximation gaussienne. La combinaison des équations (1), (2), (3) and (4) donne l'évolution complète de l'information mutuelle

$$x_{vc}^{(\ell+1)} = F([\underline{\lambda}^I, \underline{\lambda}^R], x_{vc}^{(\ell)}, \mu_0) \quad (5)$$

pour laquelle les conditions à l'initialisation sont $\forall i = 2 \dots t_{c_{\max}}, x_{sv}^{(0)}(i) = 0$ and $x_{cv}^{(0)} = 0$.

Les équations (1) et (2) sont les équations standards de l'évolution de l'information mutuelle [5][10] pour un code LDPC avec une prise en compte (dépendante du degré de connexion) de la moyenne des messages provenant du décodeur source. L'équation (3) traduit le transfert d'information entre le décodeur canal et le décodeur source (somme des messages LLR entrant à la sortie du noeud). Et enfin, l'équation (4) s'appuie sur l'hypothèse de stationnarité de la réponse du décodeur source souple.

Remarque : le cas considéré étant celui d'une concaténation série avec le décodeur source comme décodeur externe, sa fonction de transfert $T(\cdot)$ est indépendante du rapport signal à bruit du canal. L'estimation par Monte-Carlo de $T(\cdot)$ est alors réalisée une seule fois, et une approximation fonctionnelle de $T(\cdot)$ est utilisée pour l'optimisation.

C. Condition de stabilité

La condition $F([\underline{\lambda}^I, \underline{\lambda}^R], x, \mu_0) > x, \forall x \in [0, 1]$ assure la convergence au point fixe $x = 1$ de l'équation (5), correspondant à une probabilité d'erreur nulle. Cette condition est alors donnée par $F'([\underline{\lambda}^I, \underline{\lambda}^R], 1, \mu_0) < 1$.

Utilisant les résultats fournis par [13] sur la dérivée de la fonction $J(\cdot)$, la condition de stabilité est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1: Sous approximation gaussienne et évolution de l'information mutuelle, la condition de stabilité au point fixe est donnée par

(i) Si $T(1) = 1$:

$$\lambda_2^R < e^{\frac{1}{2\sigma^2}} / \sum_j \rho_j(j-1)$$

(ii) Si $T(1) < 1$:

$$\lambda_2^I e^{-\frac{M}{4}} + \lambda_2^R < e^{\frac{1}{2\sigma^2}} / \sum_{j=2}^{t_{r_{\max}}} \rho_j(j-1)$$

avec $M = J^{-1}(T(1))$.

Remarque : Notons que si $T(1) \rightarrow 1$, $M \rightarrow +\infty$, et ainsi que la condition (ii) conduit à la condition (i).

La condition de stabilité n'est plus comme sur les canaux standards [12] une condition ne dépendant que du canal, mais elle dépend aussi de la fonction de transfert $T(\cdot)$ du décodeur source (décodeur externe). La condition de stabilité est en effet fonction de la réponse de la fonction de transfert au point $T(1)$.

On peut aussi tenter de rapprocher l'expression obtenue à la condition de stabilité pour un canal gaussien sans mémoire. Sous évolution de densité [12], cette condition de stabilité est donnée par $\lambda_2 < e^{\frac{1}{2\sigma^2}} / \sum_j \rho_j(j-1)$, où λ_2 est la proportion totale de branches connectées à des noeuds de données de degrés 2 (condition que l'on

retrouve si l'on considère l'évolution de l'information mutuelle sous approximation gaussienne pour ce canal [10]). On peut alors donner une interprétation sur la condition liée aux degrés 2 dans le cas source-canal conjoint. Quand $T(1) = 1$, la condition de stabilité est identique à celle du canal gaussien en restreignant la condition aux noeuds de données associés à la parité. On peut en effet interpréter la branche de retour du décodeur source vers le décodeur LDPC comme une branche virtuelle supplémentaire au graphe. Ainsi tous les noeuds d'information sont virtuellement connectés à $i + 1$ branches, mais ceci n'est pas vrai pour les noeuds associés à la redondance. Les seuls noeuds de degrés 2 seront donc ceux de la redondance, et sont donc les seuls à être contraints pour la stabilité asymptotique, car ils ne bénéficient pas de la diversité supplémentaire qu'apporte finalement le décodeur source aux bits d'information. Quand $T(1) < 1$, cela signifie que l'ensemble du décodeur source sature en une valeur seuil : cette valeur seuil n'est limitante que pour les noeuds de degré deux (d'après les équations), on n'a alors pas complètement le bénéfice de la branche "virtuelle" évoquée précédemment, d'où une condition portant sur la redondance et l'information (le terme λ_2^I étant pondéré par un terme reflétant la qualité asymptotique du canal de retour du décodeur source).

IV. OPTIMISATION DU RÉCEPTEUR JOINT

Dans cette section sont décrites différentes stratégies d'optimisation : le récepteur conjoint optimisé (optimisation DSCC) et les récepteurs compatibles avec des applications non conjointes (optimisation compatible non-DSCC).

A. Optimisation DSCC

Selon l'équation (5), nous pouvons voir que l'évolution de l'information mutuelle est une fonction linéaire des paramètres λ_i^I , $i = 2 \dots t_{c_{\max}}$ et λ_r^R , $r = 2 \dots t_{r_{\max}}$. Et elle ne nécessite que de connaître la fonction de transfert du code source. Comme nous nous intéressons à l'optimisation du code LDPC, il a été proposé de minimiser le seuil de convergence du système complet [11]. De manière analogue au canal BABG, cela suppose de passer par deux étapes : la première étape consiste en la maximisation du rendement, puis vient la minimisation du seuil de convergence à proprement parlé.

1) *Maximisation du rendement*: Comme indiqué dans [4], maximiser le rendement R est équivalent à maximiser la fonction de coût :

$$C = \sum_{i=2}^{t_{c_{\max}}} \lambda_i^I / i + \sum_{r=2}^{t_{r_{\max}}} \lambda_r^R / r$$

De plus, nous avons une contrainte sur les proportions, due au fait que les codes LDPC considérés sont systématiques, qui implique la relation suivante sur les proportions de noeuds $\{\tilde{\lambda}_i^I, i = 2 \dots t_{c_{\max}}\}$: $\sum_{i=2}^{t_{c_{\max}}} \tilde{\lambda}_i^I = R$. Ceci est alors équivalent à

$$\sum_{r=2}^{t_{c_{\max}}} \lambda_r^R / r = \sum_{j=2}^{t_{r_{\max}}} \rho_j / j \quad (6)$$

Comme nous le voyons, contraintes et fonction de coût sont linéaires en $\underline{\lambda}$ pour $\underline{\rho}$ et σ^2 fixés. L'optimisation des paramètres du code LDPC irrégulier peut s'écrire sous la forme d'un problème d'optimisation que l'on peut

résoudre par programmation linéaire lorsque l'on considère le rendement comme fonction de coût à maximiser [11]. Pour $\rho(x)$ (polynôme associé au vecteur $\underline{\rho}$) et σ^2 fixés, le problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\underline{\lambda}_{opt} = \max_{\underline{\lambda}} [1/t_c^\top, 1/t_r^\top]^\top \underline{\lambda} \text{ avec les contraintes} \quad (7)$$

$$[C_1] \text{ proportions : } 1^\top \underline{\lambda} = 1 \text{ et } 1/t_c^\top \underline{\lambda}^R = 1/t_r^\top \underline{\rho},$$

$$[C_2] \text{ convergence : } F(\underline{\lambda}, x, \mu_0) > x,$$

$$[C_3] \text{ condition de stabilité : } \lambda_2^I e^{-\frac{M}{4}} + \lambda_2^R < \lambda_2^*(\sigma^2, \underline{\rho}).$$

avec

$$\lambda_2^*(\sigma^2, \underline{\rho}) = e^{\frac{1}{2\sigma^2}} / \sum_{j=2}^{t_{r,max}} \rho_j(j-1)$$

2) *Minimisation du seuil*: En utilisant l'étape précédente, on recherche pour $\rho(x)$ fixé, la valeur maximale σ^2 pour laquelle on atteint le rendement cible R qui nous donne alors la valeur de seuil $\delta_\rho = 1/(2R\sigma^2)$. Il reste maintenant à réaliser cette optimisation pour différentes valeurs de $\underline{\rho}$ et choisir le couple solution $(\underline{\lambda}, \underline{\rho})$ qui minimise la valeur du seuil δ_ρ . Une façon pertinente de fixer $\rho(x)$ est de réduire le polynôme à un polynôme défini avec deux degrés voisins $\rho(x) = \rho_j x^{j-1} + (1 - \rho_j)x^j$ [4]. Le paramètre d'optimisation sur $\rho(x)$ est alors réduit au degré moyen des noeuds de parité $\bar{\rho}$.

Ainsi, pour un rendement de codage cible R , par recherche successive sur σ^2 et $\rho(x)$, on obtient les paramètres optimaux $(\underline{\lambda}, \underline{\rho})$, donnant le meilleur seuil de convergence $\delta^* = (E_b/N_0)_{opt}$ sous approximation gaussienne.

B. Optimisation compatible non-DSCC

En pratique, les contraintes système font qu'il est souvent souhaité que le codeur canal conçu puisse offrir de bonnes performances sur un canal donné avec ou sans interactions avec le décodeur source. Pour un canal de transmission donné standard (BABG par exemple), il est possible de déterminer les paramètres du code LDPC permettant d'approcher le plus proche possible de la capacité du canal. Ce code est alors un candidat naturel pour notre récepteur compatible. D'un point de vue théorique (approche asymptotique utilisant le seuil de convergence comme critère de performance), tous les mappings d'information sont équivalents. D'un point de vue pratique cependant, le mapping d'information consistant à allouer les bits d'information aux noeuds les plus connectés permet de minimiser la probabilité d'erreur bit moyenne à nombre d'itérations fini. Nous notons ce mapping \mathcal{M}_0 . Compte tenu de la dissymétrie information/redondance dans le cadre source-canal conjoint, différents mappings conduisent à des seuils de convergence différents et donc rien ne garantit que le mapping \mathcal{M}_0 soit optimal du point de vue asymptotique pour des applications compatibles. La question est alors : quel est le mapping optimal \mathcal{M}^* ? Quels sont ses performances ?

En considérant la méthode d'optimisation (7), le mapping optimal \mathcal{M}^* en terme de seuil de convergence est obtenu simplement par ajout de la contrainte suivante :

$$[C_4] \forall k = 2 \dots t_{c,max}, \lambda_k^I + \lambda_k^R = \lambda_k^{(a)}$$

$\lambda_k^{(a)}$ est la proportion de branches connectées à des noeuds de données de degré k pour le code optimisé sur le canal considéré (ici le canal BABG).

V. RÉSULTATS

Sans perte de généralités, le décodeur source considéré est un décodeur de codes source de type Huffman à entrées et sorties souples (Variable Length Code, SISO-VLC). Le code de source considéré en exemple et la source de symboles correspondante sont issus de [2] : on considérera donc dans la suite le code $\mathcal{C} = (00, 11, 010, 101, 0110)$. Les probabilités associées sont $\mathcal{P} = (0.33, 0.30, 0.18, 0.10, 0.09)$. L'entropie associée et la longueur moyenne d'un mot de code source sont données respectivement par $H = 2.14$ et $\bar{l} = 2.46$ bits/symboles. La redondance résiduelle est alors $R_s = H/\bar{l} = 0.86992$. Le décodeur de source SISO-VLC est un décodeur MAP sur le treillis bit du code [1]. La fonction de transfert $T(\cdot)$ du décodeur source est estimée par méthode de Monte Carlo [6]. Pour le code source utilisé, l'EXIT chart simulée donne $T(1) \simeq 1$. On considérera par ailleurs des degrés concentrés pour $\rho(x)$ [4]. L'optimisation pour différentes valeurs de $\bar{\rho} = \rho j + (1 - \rho)(j + 1)$ est réalisée pour obtenir le code avec le meilleur seuil de convergence pour $t_{c_{\max}} = 30$, $R = 1/2$ et $R = 2/3$. Le rendement global est $R_T = R_s R = 0.43496$ pour le système avec un code de rendement $R = 1/2$ et $R_T = 0.5799$ pour celui avec le code de rendement $R = 2/3$. Pour une modulation de type MDP-2, la limite de Shannon pour le canal BABG donne les rapports signal à bruit théoriques optimaux $E_b/N_0 = -0.0957$ dB et $E_b/N_0 = 0.5734$ dB pour $R_T = 0.43496$ et $R_T = 0.5799$ respectivement.

A. Résultats d'optimisation

Dans le cadre de l'optimisation DSCC, le seuil de convergence théorique $\delta^* = 1/(2 * R_T * \sigma^2)$ du récepteur conjoint global est une fonction de $\bar{\rho}$. Par optimisation successive, on peut montrer qu'il existe, à la fois pour les rendements $R = 1/2$ et $R = 2/3$, une valeur minimal δ^* qui nous donne alors les paramètres optimaux $(\underline{\lambda}, \underline{\rho})$ pour le récepteur conjoint. Ceci est illustré à la figure 3 où sont également reportés les seuils théoriques de Shannon (traits horizontaux). Pour $R = 1/2$ et $R = 2/3$, les valeurs optimales de $\bar{\rho}$ minimisant le seuil de convergence sont respectivement $\bar{\rho} = 7.91$ et $\bar{\rho} = 12.46$. Pour ces mêmes rendements, en utilisant une représentation polynomiale [4], le profil du code pour les distributions des branches connectées à des noeuds de données est donné par $\lambda(x) = \lambda^I(x) + \lambda^R(x)$ détaillé Table I.

Notons que ces seuils de convergence théoriques sont ceux obtenus dans le cadre d'une approximation gaussienne en utilisant l'évolution de l'information mutuelle. L'obtention des seuils asymptotiques exacts n'est accessible que par évolution de densité [12], qui dans le cadre d'applications source-canal pourrait être développée en suivant le modèle de [9] pour la turbo-égalisation (la caractérisation de la fonction de transfert de l'égaliseur est elle aussi obtenue par Monte-Carlo). On peut également remarquer que contrairement au cas classique d'optimisation de code pour le canal BABG où l'on sait les seuils optimistes (les seuils trouvés par cette méthode peuvent "surpasser" la capacité [5]), les seuils obtenus semblent être pessimistes (On n'atteint jamais la limite théorique dans l'exemple traité).

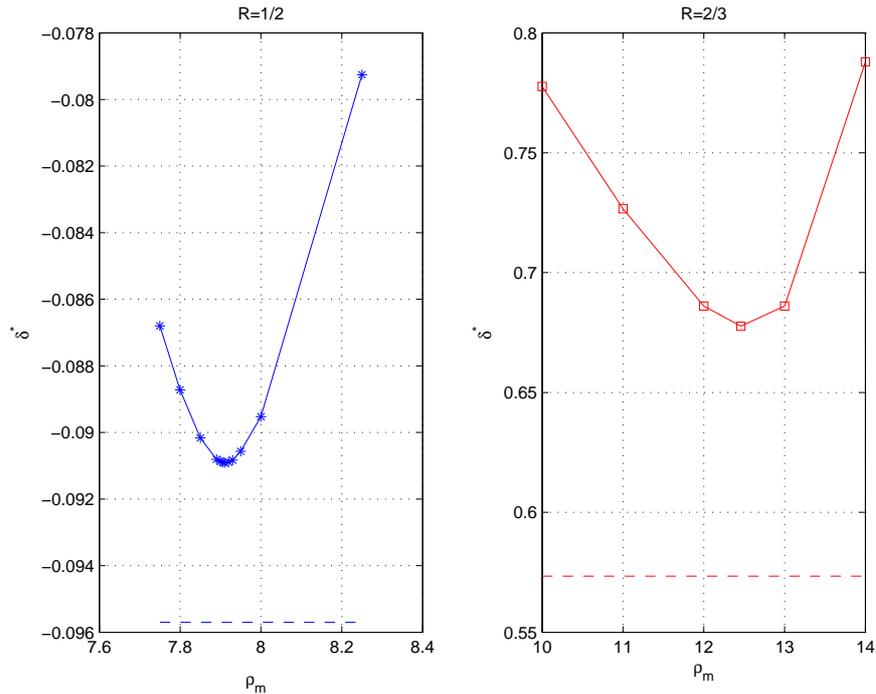


Fig. 3. Seuil de convergence optimal δ^* en fonction de $\rho_m = \bar{\rho}$. Les lignes en pointillés donnent le seuil optimal au sens de Shannon pour le rendement global R_T

Dans le cadre de l'optimisation compatible non DSCC, l'optimisation des profils des codes est réalisée tout d'abord pour le canal BABG pour $t_{c_{\max}} = 30$, $R = 1/2$ et $R = 2/3$ sous approximation gaussienne [4] en utilisant l'évolution de l'information mutuelle [13]. Pour chaque rendement de codage, les mappings \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}^* sont ensuite déterminés, en utilisant pour \mathcal{M}^* la méthode d'optimisation (7) avec la contrainte additionnelle C_4 . Les résultats sont donnés Table II. Il s'avère que, en fonction du rendement considéré, il est possible de trouver un mapping \mathcal{M}^* différent de \mathcal{M}_0 donnant le meilleur seuil de convergence pour un système compatible. Cependant, la différence semble localisée sur les degrés les plus bas, comme on peut le voir Table II pour $R = 1/2$. On peut également remarquer que pour le rendement $R = 2/3$, les mappings \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}^* sont équivalents.

B. Résultats de simulation

Pour le décodage itératif, la règle suivante est adoptée : le décodage itératif est arrêté si l'on trouve un mot de code valide (calcul du syndrome après chaque itération) ou le nombre maximum d'itérations autorisé est atteint (contrainte de délai). Pour nos simulations, le nombre d'itérations maximum est fixé arbitrairement à 150. Examinons maintenant les résultats obtenus pour des tailles de mots de code longues et moyennes. Dans les deux cas, la longueur des mots de codes est choisie de façon à avoir le même nombre de symboles sources par trame. Cela nous permet alors de comparer le taux d'erreur paquet (TEP), ainsi que le taux d'erreur bit (TEB) pour les différents rendements et récepteurs considérés. Principalement, quatre systèmes pour deux rendements différents seront comparés :

$\lambda(x)$	$R = 1/2$		$R = 2/3$	
	I	R	I	R
λ_2	0.1130	0.2216	0.1896	0.1608
λ_3	/	0.0475	/	/
λ_4	0.0830	/	/	/
λ_5	0.1201	/	0.1837	/
λ_7	/	/	0.0635	/
λ_9	0.0588	/	0.0306	/
λ_{10}	0.1044	/	0.0145	/
λ_{11}	/	/	0.0587	/
λ_{30}	0.2516	/	0.2986	/

TABLE I

DISTRIBUTIONS ASSOCIÉS AUX NOEUDS DE VARIABLES POUR LES CODES OPTIMISÉ SOURCE-CANAL.

$\lambda(x)$	$R = 1/2$		$R = 1/2$		$R = 2/3$	
	\mathcal{M}^*		\mathcal{M}_0		$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}^*$	
	I	R	I	R	I	R
λ_2	0.0080	0.2022	/	0.2102	0.0348	0.1345
λ_3	0.1641	0.0301	0.1777	0.0165	0.2011	/
λ_5	0.0435	/	0.0435	/	0.0008	/
λ_7	0.1400	/	0.1400	/	0.1964	/
λ_8	0.1044	/	0.1044	/	0.0926	/
λ_{30}	0.3036	/	0.3036	/	0.3388	/

TABLE II

MAPPINGS AVEC OPTIMISATION COMPATIBLE NON-DSCC. NOTONS QUE POUR $R = 2/3$, LES MAPPINGS \mathcal{M}_0 ET \mathcal{M}^* SONT ÉQUIVALENTS.

- (i) le récepteur optimisé source canal conjoint (DSCC-opt).
- (ii) le récepteur source-canal conjoint utilisant un code optimisé pour le canal BABG et utilisant le mapping \mathcal{M}_0 (BABG-opt \mathcal{M}_0).
- (iii) le récepteur source-canal conjoint utilisant un code optimisé pour le canal BABG et utilisant le mapping \mathcal{M}^* (BABG-opt \mathcal{M}^*) (seulement pour $R_T = 0.43496$).
- (iv) le schéma tandem optimal (T-opt) : la source est supposée parfaitement compressée et codée avec un code de rendement R_T optimisé sur le canal BABG.
- (v) le schéma tandem "classique" (TD) : la source est supposée codée avec le code VLC considéré, puis le train binaire obtenu est codé avec un code de rendement R optimisé sur le canal BABG. Le décodage est alors réalisé en utilisant un décodage itératif du code LDPC suivi d'un décodage souple du code VLC.

Par comparaison des courbes de TEP et TEB des figures 4 et 5, le récepteur DSCC-opt présente de meilleures performances que les récepteurs BABG-opt \mathcal{M}^* et BABG-opt \mathcal{M}_0 . Pour les deux rendements, le seuil de con-

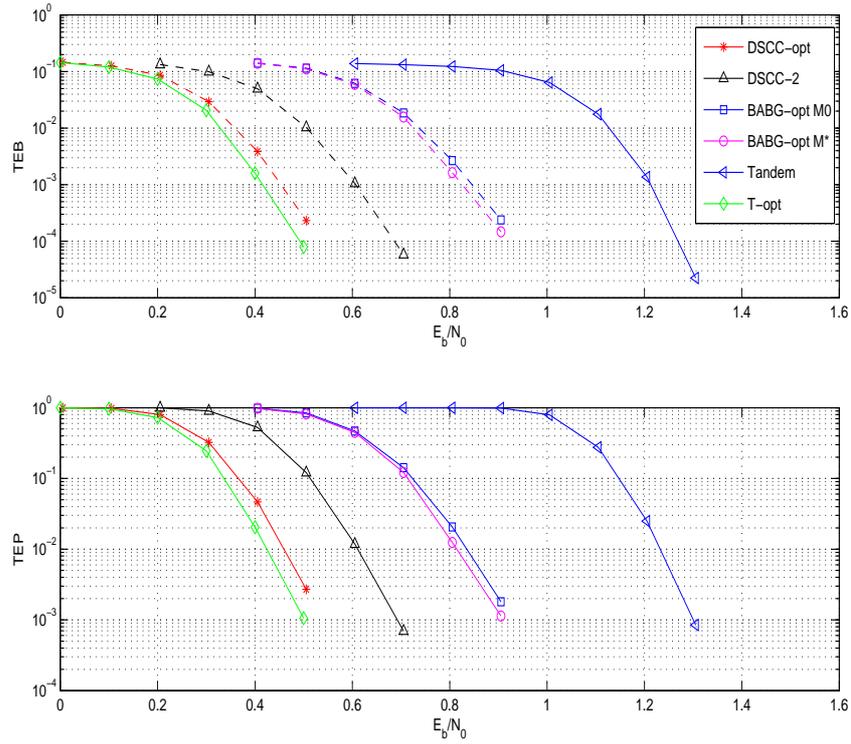


Fig. 4. TEB et TEP pour $\{N = 30000, R = 1/2\}$.

vergence (zone d'avalanche) est amélioré de 0.4 dB. Les récepteurs BABG-opt \mathcal{M}^* et BABG-opt \mathcal{M}_0 ont des performances finalement assez proches. Pour le TEP, le récepteur DSCC-opt est à moins de 0.1 dB du récepteur T-opt pour $R_T = 0.43496$, et à 0.15 dB pour $R_T = 0.5799$: le but de notre récepteur source-canal conjoint semble atteint, *i.e* avoir une exploitation efficace de la redondance résiduelle pour s'approcher le plus près possible de la limite donnée par T-opt. De plus, pour $R_T = 0.43496$ (resp. $R_T = 0.5799$), le gain obtenu est de 0.4 dB (resp. 0.5 dB) entre le système turbo LDPC-décodeur source souple et le décodeur tandem classique, et atteint presque 0.8 dB (resp. 0.9 dB) pour le décodeur source canal optimisé.

Les mêmes observations que pour les tailles de mots de code longs peuvent être faites pour les figure 6 et 7. Cependant, contrairement à ce que l'on peut observer sur les courbes précédentes, un plancher d'erreur intervient aux alentours de 10^{-3} pour les courbes de TEP, et une réduction de la pente pour les courbes de TEB. Une étude des profils des codes montre que la présence de noeuds de données de degrés 2 semble pénaliser la partie informative pour les schémas DSCC (faible robustesse) car des noeuds de données de degrés 2 sont possibles pour la partie informative (dus au gain asymptotique d'une branche virtuelle provenant du décodeur source, ce qui est discutable à taille finie).

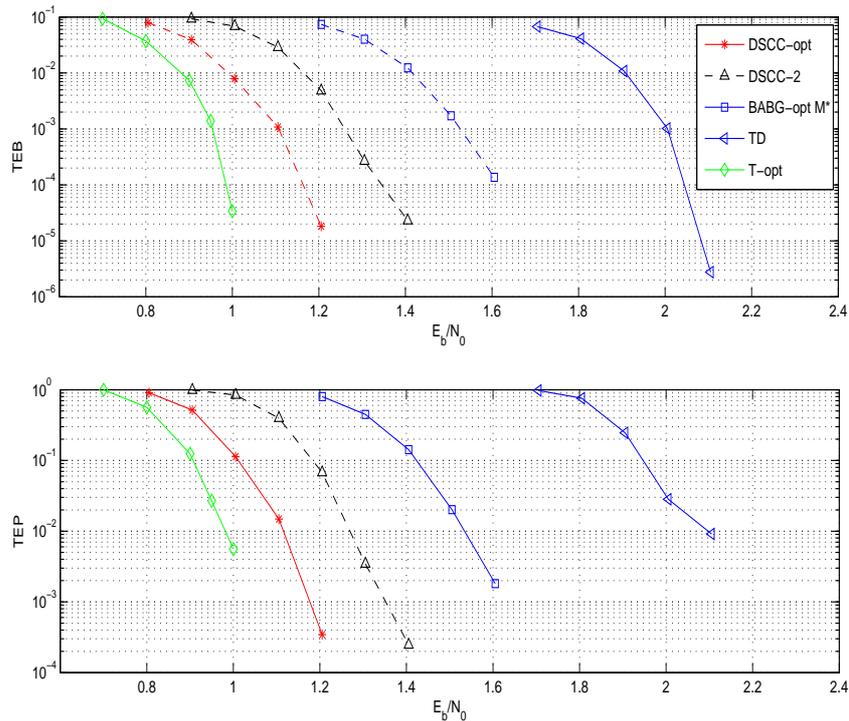


Fig. 5. TEB et TEP pour $\{N = 22500, R = 2/3\}$.

Pour vérifier cette hypothèse, l'optimisation DSCC pour $R = 1/2$ a été réalisée en imposant des degrés strictement supérieurs à 2 sur la partie informative. L'analyse de ce nouveau schéma DSCC-2 sur les figures 4 à 7 montre une perte sur le seuil de convergence (degrés de liberté supprimés à l'optimisation), mais semble donner une amélioration du plancher d'erreur à taille moyenne. Il apparaît donc que la complexité de mise en oeuvre de ce type de systèmes réside dans la capacité à construire un turbo-récepteur pour lequel on soit capable de réduire l'influence des degrés 2 sur le plancher d'erreur. La construction de matrices maximisant la taille des cycles minimaux (algorithme **PEG**[7]) et/ou réduisant l'influence des noeuds degrés 2 sur la partie informative (algorithme **ACE** [14]) est alors à considérer pour des mots de code de petite et moyenne taille. Cependant compte tenu de l'aspect conjoint du récepteur source-canal, cette construction devrait être réalisée en considérant le graphe joint décodeur source-décodeur LDPC, ce qui suppose une possible extension des algorithmes existants et qui dépassent les objectifs de cet article. On envisagera donc l'optimisation conjointe spécifique pour les tailles finies comme une perspective à ces travaux.

VI. CONCLUSION

Dans cet article, différents schémas de décodage source-canal-conjoint impliquant un décodeur LDPC comme codeur canal sont comparés pour des tailles de mots de code et rendements différents. L'analyse des résultats montre

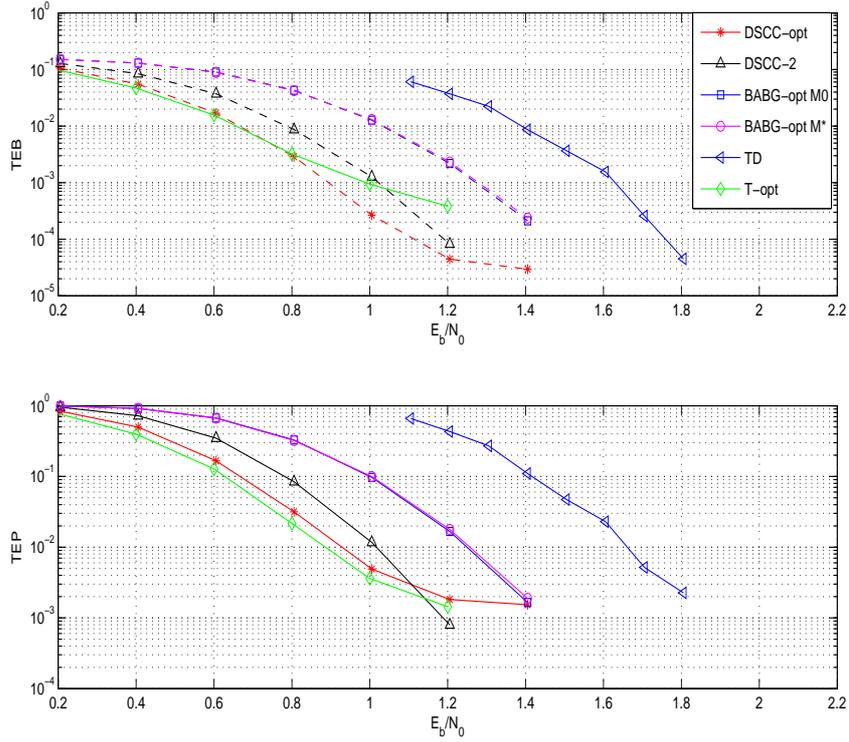


Fig. 6. TEB et TEP pour $\{N = 4096, R = 1/2\}$.

que le récepteur optimal permet d'accroître les performances vis à vis des autres schémas. Pour les systèmes compatibles avec des applications non conjointes, le mapping naturel généralement utilisé semble offrir d'aussi bonnes performances que le mapping optimal. L'apparition de planchers d'erreur à taille moyenne incite à développer des études pour une optimisation spécifique à taille finie. Une future étude possible concerne l'allocation de la redondance entre source et code de canal de manière optimale.

ANNEXE

Utilisant l'expression développée de l'équation (5), nous pouvons écrire

$$F(x) = F_I(x) + F_R(x)$$

où $F_I(\cdot)$ et $F_R(\cdot)$ sont associées respectivement à l'évolution de l'information mutuelle sur les noeuds associés aux bits d'information et à l'évolution de l'information mutuelle sur les noeuds associés aux bits de redondance.

- La dérivée $F_R(x)$ au point fixe $x = 1$ est donnée par

$$\frac{dF_R}{dx}(1) = \sum_{i=2}^{t_{c_{\max}}} \lambda_i^R(i-1) \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{J'(\mu_0 + (i-1)\mu)}{J'(\mu)} \sum_{j=2}^{t_{r_{\max}}} \rho_j(j-1)$$

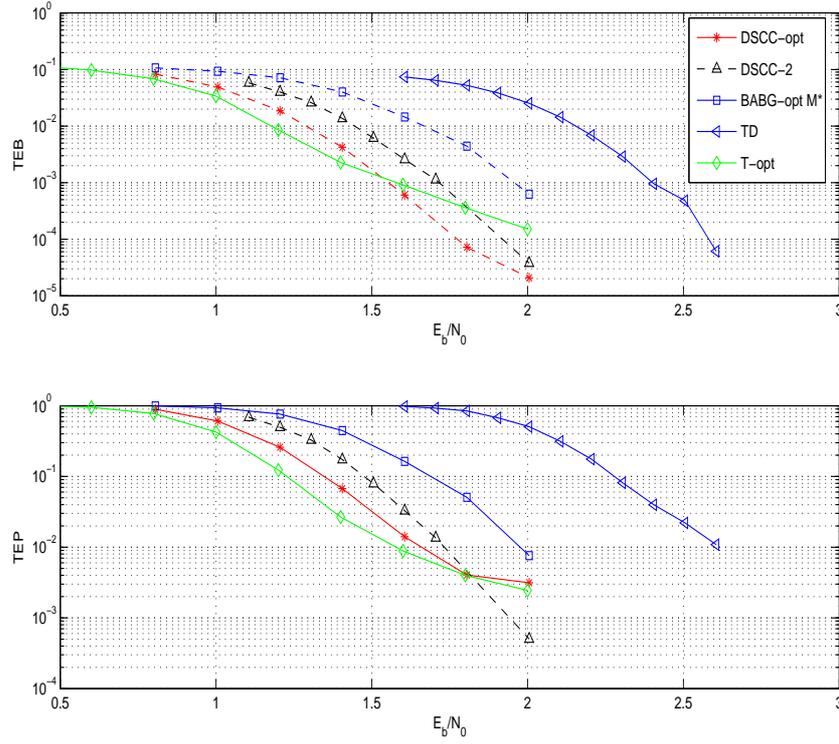


Fig. 7. TEB et TEP pour $\{N = 3072, R = 2/3\}$.

avec

$$\mu = J^{-1}\left(1 - \sum_{j=2}^{t_{r_{\max}}} \rho_j J((j-1)J^{-1}(1-x))\right).$$

Utilisant un résultat de [13], pour μ grand, nous avons

$$J'(\mu) \sim \log_2(e) \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{\mu}{4}}}{4 \sqrt{\mu}}. \quad (8)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{J'(\mu_0 + (i-1)\mu)}{J'(\mu)} &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} e^{-\frac{(\mu_0 + (i-2)\mu)}{4}} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0 + (i-1)\mu}} \\ &= \begin{cases} e^{-\frac{\mu_0}{4}} & , i = 2 \\ 0 & , i \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'expression finale de la dérivée de $F_R(\cdot)$ au point $x = 1$:

$$\frac{dF_R}{dx}(1) \sim \lambda_2^R \sum_{j=2}^{t_{r_{\max}}} \rho_j (j-1) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}. \quad (9)$$

• En supposant que la fonction de transfert $T(\cdot)$ admet une dérivée à gauche au point $x = 1$ ($\lim_{x \rightarrow 1^-} T'(x) = L$, i.e. il n'existe pas d'asymptote verticale pour le graphe de $T(\cdot)$ au point $x = 1$), la dérivée de $F_I(x)$ au point $x = 1$ est donnée par l'équation (10)

$$\begin{aligned} \frac{dF_I}{dx}(1) = & \sum_{i=2}^{t_{c\max}} \lambda_i^I (i-1) \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{i}{(i-1)} T'(J(\mu_0 + i\mu)) \frac{J'(\mu_0 + i\mu)}{J'(\eta(\mu))} \right] \frac{J'(\mu_0 + (i-1)\mu + \eta(\mu))}{J'(\mu)} \\ & \times \sum_{j=2}^{t_{r\max}} \rho_j (j-1) \end{aligned} \quad (10)$$

avec $\eta(\mu) = J^{-1}(T(J(\mu_0 + i\mu)))$.

De plus en utilisant (8), nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{J'(\mu_0 + i\mu)}{J'(\eta(\mu))} &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} e^{-\frac{(\mu_0 + i\mu - \eta(\mu))}{4}} \sqrt{\frac{\eta(\mu)}{\mu_0 + i\mu}} \\ \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{J'(\mu_0 + (i-1)\mu + \eta(\mu))}{J'(\mu)} &= \lim_{\mu \rightarrow +\infty} e^{-\frac{(\mu_0 + (i-2)\mu + \eta(\mu))}{4}} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0 + (i-1)\mu + \eta(\mu)}} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \eta(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} J^{-1}(T(J(\mu_0 + i\mu))) = J^{-1}(T(1))$, deux cas sont à distinguer :

(i) $T(1) < 1$: cela implique que $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \eta(\mu) = M$ avec M grand et il s'en suit :

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{J'(\mu_0 + i\mu)}{J'(\eta(\mu))} &= 0 \\ \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{J'(\mu_0 + (i-1)\mu + \eta(\mu))}{J'(\mu)} &= \begin{cases} e^{-\frac{(\mu_0 + M)}{4}} & , i = 2 \\ 0 & , i \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) $T(1) = 1$: nous supposons alors valable l'équivalence suivante $\eta(\mu) \sim \mu_0 + i\mu$ pour μ suffisamment grand, et il s'en suit alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{J'(\mu_0 + i\mu)}{J'(\eta(\mu))} &= 1 \\ \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{J'(\mu_0 + (i-1)\mu + \eta(\mu))}{J'(\mu)} &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, la condition de stabilité peut s'exprimer de la façon suivante :

(i) $T(1) < 1$:

$$\lambda_2^I e^{-\frac{M}{4}} + \lambda_2^R < e^{\frac{1}{2\sigma^2}} / \sum_{j=2}^{t_{r\max}} \rho_j (j-1)$$

(ii) $T(1) = 1$:

$$\lambda_2^R < e^{\frac{1}{2\sigma^2}} / \sum_{j=2}^{t_{r\max}} \rho_j (j-1)$$

REFERENCES

- [1] V.B. Balakirsky, "Joint source and channel decoding with variable length codes," *Prob. of Inf. Trans.*, vol. 27, no. 1, pp. 12–27, 2001.
- [2] R. Bauer, J. Hagenauer, "On variable length codes for iterative source/channel decoding," in *IEEE Data Comp. Conf.*, pp. 272–282, Snowbird, UT, USA, Mar. 2001.
- [3] S. ten brink, "Convergence behavior of iteratively de coded parallel concatenated codes," *IEEE Trans. on Com.*, vol. 49, no. 10, pp. 1727–1737, Oct. 2001.
- [4] S.Y. Chung, T.J. Richardson, R.L. Urbanke, "Analysis of sum product decoding of low density parity check codes using a gaussian approximation," *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol. 47, no.2, pp. 657–670, Feb. 2001.
- [5] D. Declercq, "Optimisation et Performances des codes LDPC pour les canaux non-standards", Habilitation à diriger les Recherches, Université de cergy-Pontoise, Décembre 2003.
- [6] J. Hagenauer, R. Bauer, "The turbo principle in joint source channel decoding of variable length codes," in *IEEE Inf. Theory Work.*, pp. 128–130, Cairns, Australia, Sept. 2001.
- [7] X.-Y. Hu, E. Eleftheriou and D.M. Arnold, "Regular and Irregular Progressive Edge-Growth Tanner Graphs", *IEEE Trans. on Inf. Theory*, Vol. 51, No. 1, pp. 386–398, January 2005.
- [8] X. Jaspard, L. Vandendorpe, "New iterative decoding of variable length codes with turbo codes," in *IEEE Int. Conf. on Com.*, Paris, France, Jun. 2004.
- [9] A. Kavčić, X. Ma, Michael Mitzenmacher, "Binary Intersymbol Interference Channels: Gallager Codes, Density Evolution, and Code performance Bounds", *IEEE Trans. on Inf. Theory*, Vol. 49, No. 7, pp. 1636–1652, July 2003.
- [10] C. Poulliat, "Allocation et optimisation de ressources pour la transmission de données multimédia," Thèse de Doctorat de l'université de Cergy Pontoise, Octobre 2004.
- [11] C. Poulliat, D. Declercq, C. LamyBergot, I. Fijalkow, "Analysis and optimization of irregular LDPC codes for joint source-channel decoding," *IEEE Communications Letters*, Vol. 9, No. 12, pp. 1064–1066, December 2005.
- [12] T. Richardson, A. Shokrollahi, and R. Urbanke, "Design of capacity approaching irregular low-density parity-check codes", *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 47, pp.657–670, Feb. 2001.
- [13] A. Roumy, S. Guemghar, G. Caire, S. Verdù, "Design methods for irregular repeat-accumulate codes," *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol. 50, no. 8, pp. 1711–1727, Aug. 2004.
- [14] T. Tian, C.R. Jones, J.D. Villasenor, R.D. Wesel, "Selective Avoidance of Cycles in Irregular LDPC Code Construction", *IEEE Trans. on Commun.*, Vol. 52, No. 8, pp. 1242 – 1247, Aug. 2004.